Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 1 - Sistemas de ecuaciones lineales. Soluciones

Ejercicio 1. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la matriz inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 7F_1]{F_2 \to F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_3]{F_1 \to F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 2. Calcula la forma canónica de Hermite de las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to \frac{1}{4}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \to F_1 - 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esa es la forma canónica de Hermite o escalonada reducida de la matriz $\mathbf{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 \to 4F_1 - 2F_4 \\ F_5 \to 5F_1 - F_5}]{\substack{F_2 \to 2F_1 - F_2 \\ F_3 \to 3F_1 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 11 & 13 \\ 0 & 3 & 11 & 14 & 17 \\ 0 & 9 & 13 & 17 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to -3F_2 + F_4]{F_5 \to 9F_2 - F_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 \to \frac{1}{5}F_3 \\ F_4 \to \frac{1}{5}F_4}]{F_5 \to \frac{1}{5}F_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_5]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_4 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_5\to F_4+F_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&9\\0&0&1&2&12\\0&0&0&1&14\\0&0&0&0&15\end{pmatrix}\underset{F_5\to\frac{1}{15}F_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&9\\0&0&1&2&12\\0&0&0&1&14\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Observa que en cada columna hay un pivote pot lo que $\mathbf{B}$ es una matriz inversible. A partir de aquí es muy fácil hacer ceros por encima de los pivotes siempre de derecha a izquierda empezando por el último. Finalmente obtenemos que la forma escalonada reducida de $\mathbf{B}$ es la matriz identidad. Esto es cierto para toda matriz inversible. Con los cálculos hechos también podemos deducir el valor del determinante de $\mathbf{B}$. Para ello basta tener en cuenta que una sustitución de la forma $F_i \to \alpha F_i + \beta F_j$ $(i \neq j)$ en una matriz cuadrada multiplica por α el determinante de la matriz, y que un intercambio de dos filas cambia el signo del determinante. La última matriz obtenida tiene determinante igual a 1 y para llegar a ella hemos dividido tres filas por 5 y una fila por 15. Además en los pasos que hemos dado se han producido en total 4 cambios de signo en el determinante. Concluimos que el determinante de $\mathbf{B}$ es $5^3 \times 15 = 1875$.

Ejercicio 3. Resuelve por el método de eliminación de Gauss–Jordan el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lcr}x_1+x_2+x_3-x_4&=&-2\\2x_1-x_2+x_3+x_4&=&0\\3x_1+2x_2-x_3-x_4&=&1\\x_1+x_2+3x_3-3x_4&=&-8\end{array}\right.$$

Solución.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\2&-1&1&1&0\\3&2&-1&-1&1\\1&1&3&-3&8\end{pmatrix}\underset{\substack{F_3\to F_3-3F_1\\F_4\to F_4-F_1}}{\overset{F_2\to F_2-2F_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\0&-3&-1&3&4\\0&-1&-4&2&7\\0&0&2&-2&-6\end{pmatrix}\underset{F_4\to\frac{1}{2}F_4}{\overset{F_2\leftrightarrow -F_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\0&1&4&-2&-7\\0&-3&-1&3&4\\0&0&1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to F_3+3F_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\0&1&4&-2&-7\\0&0&11&-3&-17\\0&0&1&-1&3\end{pmatrix}\underset{F_3\leftrightarrow F_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\0&1&4&-2&-7\\0&0&1&-1&3\\0&0&11&-3&-17\end{pmatrix}\underset{F_4\to F_4-11F_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-2\\0&1&4&-2&-7\\0&0&1&-1&3\\0&0&0&8&16\end{pmatrix}$$

Observa que cada columna de la matriz de los coeficientes tiene un pivote, por tanto el rango de dicha matriz es cuatro lo que nos dice que es inversible y, por tanto, el sistema es compatible determinado. Esto queda muy claro considerando el SEL correspondiente a la última matriz que sabemos que es equivalente al inicial y cuyas soluciones se calculan fácilmente:

$$\left\{\begin{array}{rcr}x_1+x_2+x_3-x_4&=&-2\\x_2+4x_3-2x_4&=&-7\\x_3-x_4&=&-3\\8x_4&=&16\end{array}\right.$$

Obteniendo que $x_4 = 2, x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 0$. Observa que para resolver fácilmente un SEL basta llegar a una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz ampliada y no es preciso llegar a la forma de Hermite.

Ejercicio 4. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&3&4\\-4&2&-6\\-3&-2&-7\end{pmatrix}$ y $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Indicar condiciones que debe cumplir el vector $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ para que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ sea compatible.

Solución. Para que un SEL sea compatible debe cumplirse que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -14+54+32+24-12-84=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2+12=14\neq 0$$

deducimos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene rango dos. Deberá cumplirse por tanto que el siguiente determinante sea nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -4 & 2 & b \\ -3 & -2 & c \end{vmatrix} = 2c+8a-9b+6a+2b+12c = 14a+14c-7b=0$$

La condición que deben cumplir a, b, c es que $2a+2c-b=0$.

Ejercicio 5. Para hacer un plaguicida se necesitan 6 litros del compuesto A; 7 litros del compuesto B y 10 litros del compuesto C. El producto comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos compuestos. El producto comercial Y contiene 1,1 y 2 partes, y el producto comercial Z contiene dichos compuestos en partes iguales. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto comercial se necesita para obtener la mezcla deseada?

Solución. Sean x, y, z los litros que usaremos de X, Y y Z respectivamente. Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{3}z = 6 \\ \dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{3}z = 7 \\ \dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}z = 10 \end{cases}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución única es $x=5$, $y=12$, $z=6$.

Ejercicio 6. Calcula una parábola cuya gráfica pasa por los puntos $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$.

Solución. La ecuación de una parábola es del tipo $y=ax^2+bx+c$. Hay que imponer que la gráfica de dicha parábola pase por los puntos $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$, lo que da lugar a un SEL:

$$\begin{cases} 4a+2b+c = 0 \\ 9a+3b+c = 0 \\ a-b+c = 12 \end{cases}$$

cuya solución única es $a=1, b=-5, c=6$.

Ejercicio 7. Calcula a, b, c y d de forma que para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$, se verifique la igualdad

$$\frac{x^3-7x^2+9x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Solución. Se multiplica la igualdad por $(x-1)^2(x^2+1)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} x^3-7x^2+9x-1 &= a(x^2+1)+b(x-1)(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2 = \\ &= ax^2+a+bx^3+bx-bx^2-b+cx^3-2cx^2+cx+dx^2-2dx+d = \\ &= (b+c)x^3+(a-b-2c+d)x^2+(b+c-2d)x+a-b+d \end{aligned}$$

Esa igualdad debe ser una identidad entre los polinomios para lo cual deben tener iguales los coeficientes de las mismas potencias de x, es decir

$$\begin{cases} b+c = 1 \\ a-b-2c+d = -7 \\ b+c-2d = 9 \\ a-b+d = -1 \end{cases}$$

Sistema que se resuelve fácilmente sin más que sustituir $b+c=1$ en la tercera ecuación y $a-b+d=-1$ en la segunda ecuación. La solución es $a=1, b=-2, c=3, d=-4$.

Ejercicio 8. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Además, la cifra de las decenas es igual a la media aritmética de las otras dos. Calcula dicho número.

Solución. Si el número es $abc = 100a + 10b + c$, la información que dan conduce a las igualdades

$$\begin{aligned} a+b+c &= 21 \\ 100a+10b+c-100c-10b-a &= 198 \\ b &= \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

Es decir

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 21 \\ 99a - 99c = 198 \\ b = \frac{a+c}{2} \end{array}\right.$$

Se trata del número 876.

Ejercicio 9. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros a, b.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + ay - z = 0 \\ x - ay = 3 \\ 2ax + y - z = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} -x + ay - z = 2 \\ x + y - az = 3a+1 \\ ax - y - z = 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}\right.$$

Solución. El determinante de la matriz de los coeficientes del primer sistema es $-1+3a-2a^2$. Por tanto, si $-1+3a-2a^2 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $-1+3a-2a^2=0$, es decir, $a=1$ o $a=1/2$, entonces la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

El determinante de la matriz de los coeficientes del segundo sistema es $2+3a-a^3$. Por tanto, si $2+3a-a^3 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $2+3a-a^3=0$, entonces $a=-1$ o $a=2$. Para $a=-1$ el sistema se reduce a una sola ecuación $x+y+z=-2$ y es un sistema compatible indeterminado con dos variables libres y, z, que pueden tomar cualquier valor, cuya solución es $x=-2-y-z$. Para $a=2$ la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

El determinante de la matriz de los coeficientes del tercer sistema es $b(a^3-3a+2)$. Por tanto, si $b(a^3-3a+2) \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $b=0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $b=0$ y $a=1$ el sistema se reduce a dos ecuaciones $x+z=1$ y $x+z=0$, por lo que es claramente incompatible (el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada es 2). Las soluciones de $a^3-3a+2=0$ son $a=1$ y $a=-2$. Si $b \neq 0$ y $a=1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 1, y, si $b \neq 1$, el rango de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es incompatible. Si $a=1$ y $b=1$ el sistema se reduce a una ecuación $x+y+z=1$. Cuando $b \neq 0$ y $a=-2$, el rango de la matriz ampliada es 3 si $b \neq -2$ y el sistema es incompatible; si $b=-2$ el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, cuyas soluciones vienen dadas en función de la variable libre z.

Ejercicio 10. Calcula los coeficientes de las siguientes reacciones químicas para que el número de átomos de cada elemento antes y después de la reacción sea el mismo.

a) $\mathrm{x_1FeS_2 + x_2S_2 \to x_3Fe_2O_3 + x_4SO_2}$.

b) $\mathrm{x_1NaHCO_3 + x_2H_3C_6H_5O_7 \to x_3Na_3C_6H_5O_7 + x_4H_2O + x_5CO_2}$.

Solución. Planteamos la primera reacción, las otras son parecidas. Se trata de encontrar números enteros positivos $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{u}, \mathrm{v}$ tales que escribiendo

$$\mathrm{x}\,\mathrm{NaHCO_3} + \mathrm{y}\,\mathrm{H_3C_6H_5O_7} \to \mathrm{z}\,\mathrm{Na_3C_6H_5O_7} + \mathrm{u}\,\mathrm{H_2O} + \mathrm{v}\,\mathrm{CO_2}$$

los átomos de cada elemento antes y después de la reacción sean los mismos. Resulta así, igualando átomos de sodio, hidrógeno, carbono y oxígeno, en ese orden, el siguiente SEL que, por comodidad, represento en forma vectorial:

$$(\mathrm{x}, \mathrm{x} + 8\mathrm{y}, \mathrm{x} + 6\mathrm{y}, 3\mathrm{x} + 7\mathrm{y}) = (3\mathrm{z}, 5\mathrm{z} + 2\mathrm{u}, 6\mathrm{z} + \mathrm{v}, 7\mathrm{z} + \mathrm{u} + 2\mathrm{v})$$

Dicho SEL puede resolverse por el método de Gauss-Jordan. Es un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas y la matriz de los coeficientes tiene rango 4 por lo que una variable, v (la que no tiene pivote), queda libre y las demás se expresan en función de ella. La solución es $\mathrm{x} = \mathrm{v}, \mathrm{y} = \mathrm{v}/3, \mathrm{z} = \mathrm{v}/3, \mathrm{u} = \mathrm{v}$. Como buscamos soluciones enteras positivas, lo natural es hacer $\mathrm{v} = 3$ con lo cual $\mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = 1$, $\mathrm{z} = 1, \mathrm{u} = 3, \mathrm{v} = 3$.

Ejercicio 11. Calcula una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ sabiendo que su producto por los vectores columna $(1, 2, -2)^t$, $(2, 1, -2)^t$, $(-1, 0, 1)^t$ es respectivamente igual a los vectores columna $(3, 1, -3)^t$, $(4, -1, -1)^t$, $(-2, 1, 0)^t$.

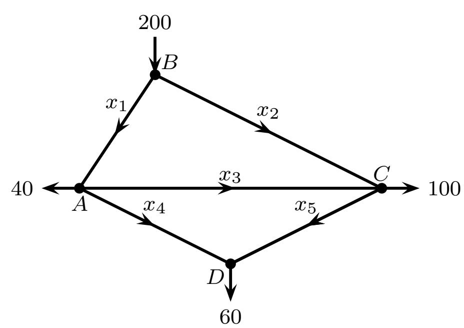
Solución. Los datos que nos dan pueden escribirse matricialmente en la forma $AB = C$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz B tiene determinante distinto de cero, es inversible. Basta entonces calcular la matriz inversa B^{-1} para obtener $A = CB^{-1}$.

Ejercicio 12.

Analiza el flujo de la red de calles que se muestra en la figura (las tasas de flujo se dan en automóviles por minuto). ¿Qué valor mínimo tiene x_1 cuando $x_4 = 0$?



Solución. Observa que el flujo que entra en la red es igual al que sale. Tenemos cuatro ecuaciones, una por cada nodo A, B, C, D. Igualamos en cada caso el flujo entrante al flujo saliente:

$$(x_1, 200, x_2 + x_3, x_4 + x_5) = (x_3 + x_4 + 40, x_1 + x_2, x_5 + 100, 60)$$

La matriz de los coeficientes del sistema es (indico las filas de la matriz):

$$\big((1, 0, -1, -1, 0), (-1, -1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, 1)\big)$$

Cuya forma de Hermite es

$$\big((1, 0, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0)\big)$$

Es, por tanto, una matriz de rango 3 y las variables x_3 y x_5 no tienen pivote. Se trata, por tanto, de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones vienen dadas en función de x_3 y x_5 como sigue: $x_1 = 100 + x_3 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x4 = 60 - x_5$. Si $x_4 = 0$, entonces $x_5 = 60$ y $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$. Como todas las soluciones deben ser mayores o iguales que 0, deducimos que $0 \leqslant x_3 \leqslant 160$ y $40 \leqslant x_1 \leqslant 200$.

Ejercicio 14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n tal que la suma de los elementos de cada fila es cero. Prueba que $\mathbf{A}$ no es inversible.

Solución. Lo que nos dicen implica que la suma de todas las columnas de $\mathbf{A}$ es el vector cero. Por tanto, las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes y, por las propiedades de los determinantes, concluimos que el determinante de $\mathbf{A}$ es cero.

También podemos razonar como sigue. Consideremos el SEL homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Dicho SEL admite, como todo SEL homogéneo, la solución trivial $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. El enunciado del ejercicio nos dice que también admite la solución $(1, 1, \dots, 1)^t$. Luego dicho SEL es compatible indeterminado y, por tanto, el determinante de $\mathbf{A}$ es cero.